О. А. Иванов 100 олимпиадных задач для старшеклассников. Задание 9

1. У царя Гвидона было три сына. Из числа его потомков 99 имели по два сына, а остальные умерли бездетными. Сколько всего потомков было у царя Гвидона?

2. Сколько трехзначных чисел делятся на 9 или на 15?

3. Докажите, что при всяком натуральном n верны неравенства

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

4. Натуральные числа от 1 до ab выписаны по строчкам (начиная с первой) в порядке возрастания в клетки таблицы, содержащей a строк и b столбцов. Найдите a и b, если известно, что число 20 находится в третьей строке, 41 — в пятой, а 103 — в последней.

5. Известно, что средняя линия четырехугольника равна полусумме не пересекающихся с ней сторон. Докажите, что этот четырехугольник — трапеция.

6. Упростите выражение

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

и объясните полученный ответ.

7. Решите уравнение $\dfrac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{10}{9}$.

8. Найдите все возможные наборы из семи действительных чисел, сумма любых четырех из которых равна произведению трех оставшихся.

9. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки плоскости до трех вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой вершины.

10. В противоположных вершинах куба сидят тараканы. Каков кратчайший путь от одного из них к другому?