Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1995 год, вариант 1

1. а) Найдите наименьшее положительное решение уравнения $\operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{tg}^2 x = 10$.

б) Найдите число решений уравнения $1 + ax = \sqrt{x+3}$.

в) Докажите, что уравнение $8^x + 4^x + 2^x = 2x + 3$ имеет ровно два решения.

г) Найдите наибольшее по абсолютной величине значение выражения $(x-8)(x-14)(x-16)(x-22)$ при $x \in [8; 22]$.

2. Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ связаны соотношениями $a_{n+1} = \dfrac{b_n + c_n}{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{c_n + a_n}{2}$ и $c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

а) Найдите пределы этих последовательностей, если $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ и $c_1 = 2$.

б) Пусть

$$\xi = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}.$$

Докажите, что число ξ является общим пределом данных последовательностей.

в) Дан треугольник ABC с углами $\dfrac{1}{7}\pi$, $\dfrac{2}{7}\pi$, $\dfrac{4}{7}\pi$; A_1, B_1, C_1 — точки пересечения биссектрис его углов с описанной около него окружностью, A_2, B_2, C_2 — точки пересечения биссектрис углов треугольника $A_1B_1C_1$ с этой же окружностью, и т. д. Вычислите углы треугольника $A_{40}B_{40}C_{40}$ с точностью до 0,01.

3. а) Докажите, что если число $x + x^{-1}$ целое, то при всех $n \in \mathbb{Z}$ число $x^n + x^{-n}$ также целое.

б) Докажите, что число $[(3+\sqrt{5})^n] + 1$ делится на 2^n ($[\ .\ ]$ — целая часть числа).

в) Докажите, что если многочлен $x^n + 1$ делится на многочлен $x^k + 1$, то многочлен $x^{4n} + 1$ делится на $x^{4k} + 1$.

4. а) У Танъ-Янны имеются чашечные весы и набор разновесок в $1,\ 3,\ \ldots,\ 3^{1995}$ амма (по одной каждого веса). Докажите, что ей не удастся разложить их по чашкам весов так, чтобы весы были в равновесии.

б) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x \cos 3x \ldots \cos 3^{1995} x\, dx$.

в) Палку случайным образом сломали в двух местах. Найдите вероятность того, что длина каждого из кусков не превосходит половины ее длины.