Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1995 год, вариант 2

1. а) Найдите наименьшее положительное решение уравнения $\operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 10$.

б) Найдите число решений уравнения $2 + ax = \sqrt{5 - x}$.

в) Докажите, что уравнение $1 + 9^{9x} + 5^x = 4x + 3$ имеет ровно два решения.

г) Докажите, что выражение $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$ принимает любое действительное значение тогда и только тогда, когда только одно из чисел a, b лежит между c и d.

2. Последовательности a_n, b_n связаны соотношениями $a_{n+1} = \dfrac{b_n}{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{1 + a_n}{2}$.

а) Пусть $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. Положим

$$\Delta_n = \sqrt{\left(a_n - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b_n - \frac{2}{3}\right)^2}.$$

Докажите, что числа Δ_n образуют геометрическую прогрессию.

б) Докажите, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют и не зависят от выбора a_1, b_1.

в) Лучи ℓ_1 и m_1 лежат в первом координатном угле, причем луч ℓ_1 образует угол $\dfrac{\pi}{5}$ с осью абсцисс, а m_1 — угол $\dfrac{\pi}{7}$ с осью ординат. Луч ℓ_n является биссектрисой угла между осью абсцисс и лучом m_{n-1}, а m_n — биссектрисой угла между осью ординат и ℓ_{n-1}. Вычислите с точностью до 0,01 угол между лучом ℓ_{40} и осью абсцисс.

3. а) Известно, что $x + y = 2$, $x^3 + y^3 = 5$. Найдите $x^5 + y^5$.

б) Докажите, что если многочлен $x^n - 1$ делится на многочлен $x^k - 1$, то многочлен $x^{4n} - 1$ делится на $x^{4k} - 1$.

в) Докажите, что многочлен $(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)\ldots(x^{n+k-1} - 1)$ делится на многочлен $(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)$.

4. а) У Янатты имеются чашечные весы и набор разновесок в 1, 5, ..., 5^{1995} аппа (по одной каждого веса). Докажите, что ей не удастся разложить их по чашкам весов так, чтобы весы были в равновесии.

б) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x \sin 5x \ldots \sin 5^{1995} x\, dx$.

в) Палку случайным образом сломали в двух местах. Найдите вероятность того, что из образовавшихся кусков можно составить треугольник.