О. А. Иванов 100 олимпиадных задач для старшеклассников. Задание 3

1. Прямая делит единичный квадрат на две части. Найдите наибольшее произведение площадей этих частей.

2. Изобразите на плоскости множество всех пар (p, q), для которых сумма квадратов действительных корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна 1.

3. Известно, что среди 26 монет имеется одна фальшивая, более легкая, чем все остальные. Найдите эту монету при помощи трех взвешиваний на чашечных весах без гирь. Сколько взвешиваний потребуется, если монет будет 82?

4. Изобразите множество середин отрезков, концы которых лежат на кривой $y = x^3$.

5. Кащей Бессмертный загадывает три цифры *a, b, c.* Иван Царевич должен назвать три числа *x, y, z,* после чего Кащей сообщит ему сумму *ax* + *by* + *cz.* Царевич должен угадать задуманные цифры, иначе ему отрубят голову. Как ему спастись?

6. Решите числовой ребус (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные):

$$УДАР + УДАР = ДРАКА$$

7. Каких чисел больше среди восьмизначных: тех, в записи которых есть единицы, или тех, в записи которых они отсутствуют?

8. Имеются два выпуклых многоугольника, один из которых вложен в другой, стороны которых попарно параллельны и отстают друг от друга на 1. Докажите, что разность площадей этих многоугольников не меньше $p + \pi$ где p — это периметр меньшего многоугольника.

9. Докажите, что любую сумму, большую 7 копеек, можно заплатить без сдачи трех- и пятикопеечными монетами.

10. Докажите, что если число $x + \frac{1}{x}$ — целое, то число $x^n + \frac{1}{x^n}$ также является целым.