Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1994 год, вариант 2

1. а) Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение

$$|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-1994|=a?$$

б) Докажите, что при любом натуральном n число $n^{1994}-1994n+1993$ делится на $(n-1)^2$.

в) Докажите неравенство

$$\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}>\frac{1}{4},$$

где в числителе дроби 1994 квадратных корня, в знаменателе — 1993.

2. а) Решите неравенство $x\leqslant\sqrt[3]{|3x-1|-1}$.

б) Найдите все решения уравнения $\cos 2x+b(\cos x+\sin x)=0$, лежащие в отрезке $[0;\pi]$.

в) Решите уравнение $5^{2x}=3^{2x}+2\cdot 5^x+2\cdot 3^x$.

3. а) Найдите уравнения тех касательных к графику функции $y=e^x$, которые проходят через начало координат.

б) При каких a уравнение $e^x=ax$ имеет решения?

в) Сколько решений имеет уравнение $10^x=x^{10}$?

г) Сколько рациональных решений имеет уравнение пункта *в*?

4. а) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске квадрат из целого числа ее клеток?

б) Сколько существует n-позиционных двоичных чисел, в которых нулей не меньше, чем единиц?

в) Вася и Оля договорились о встрече между 17 и 18 часами. Вася будет ждать Олю в течение 30 минут после своего прихода, а Оля Васю — 10 минут. Какова вероятность их встречи, если каждый из них может подойти к назначенному месту в любой момент времени между 17 и 18 часами?