О. А. Иванов 100 олимпиадных задач для старшеклассников. Задание 1

1. Найдите такое наименьшее натуральное число n, при котором $n!$ делится на 990.

2. Решите уравнение $\max\{x^2 - x + 1, 4x - x^2\} = 3$.

3. Сколько решений имеет уравнение $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = a$?

4. Разрежьте квадрат на 6, 8, 9 квадратов. На какое еще число квадратов можно разрезать квадрат?

5. Решите в целых числах уравнение $x + y = xy$.

6. Из Манчестера и Ливерпуля одновременно навстречу друг другу выехали в магическое путешествие Пол и Джон. После их встречи Пол ехал еще 9 часов до Ливерпуля, а Джон — 16 часов до Манчестера. Сколько часов был в пути каждый из них?

7. Найдите на плоскости точку, сумма расстояний от которой до вершин данного выпуклого четырехугольника является наименьшей.

8. В единичном квадрате где-то расположены 51 точка. Докажите, что в некотором квадрате со стороной $\frac{1}{5}$ имеются хотя бы три из них. Верно ли, что найдется круг радиуса $\frac{1}{7}$, который также содержит по меньшей мере три из этих точек?

9. Можно ли ходом коня попасть из поля `a1` шахматной доски на поле `h8`, побывав на каждой клетке по одному разу?

10. Какое наибольшее число коней можно расставить на шахматной доске так, что ни один из них не бил другого?