Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1993 год, вариант 1

1. а) Постройте эскиз графика функции $y = \left|\log_{2x}\dfrac{4}{x}\right|$.

б) Изобразите на плоскости множество точек $A(a, b)$, координаты которых удовлетворяют равенству

$$\max_{x\in\mathbb{R}} a^{\sin x} = \max_{x\in\mathbb{R}} b^{\cos x}.$$

в) Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x = 1 - ay^2, \\ y = 1 - ax^2 \end{cases}$$

имеет два решения.

г) Докажите, что $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \sin x}{1+x^2}\,dx \to 0$ при $n \to +\infty$.

2. а) Решите неравенство $x \cdot 2^{\sqrt{x+2}} + 2^x \geqslant 2^{\sqrt{x+2}} + x \cdot 2^x$.

б) Решите неравенство $\sin^2 x + \dfrac{2}{\sin x} \leqslant \sin x + 2$.

в) Найдите все прямые, касающиеся графика функции $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 19x + 93$ в двух различных точках.

3. Пусть $p_k(x) = 1 + x + \ldots + x^k$, $Q_{k,n}(x) = p_k(x^n)$, $k, n \in \mathbb{N}$.

а) Докажите, что многочлен $p_{2m}(x)$ не имеет действительных корней.

б) Найдите все такие n, при которых многочлен $Q_{2,n}(x)$ делится на $p_2(x)$.

в) При каком условии на k и n $Q_{k,n}(x)$ делится на $p_k(x)$?

4. а) Найдите число различных буквенных сочетаний, которые можно образовать, переставляя буквы в слове «баобаб».

б) Докажите тождество $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.

в) Двое играют в такую игру: монету бросают два раза и первый из двух игроков выигрывает, если оба раза она упала одной и той же стороной. Известно, что монета фальшивая, так что вероятность появления герба при одном бросании равна $p \neq \dfrac{1}{2}$. При каких p чаще будет выигрывать первый игрок?