О. А. Иванов 100 олимпиадных задач для старшеклассников. Задание 7

1. 100 кг свежесобранных грибов имели влажность 99 %. Через два дня их влажность составляла 98 %. Сколько стали весить грибы?

2. Докажите, что $\dfrac{x}{1+y}+\dfrac{y}{1+x}<1$ при всех $x, y \in (0;1)$.

3. Найдите все такие b, при которых для любого a система неравенств $\begin{cases}|x-2|\geqslant 5,\\ |x-a|\leqslant b\end{cases}$ имеет решение.

4. Из кучи, содержащей 1001 камень, выбросили один камень, а оставшиеся произвольно разложили на две кучи. Проделаем аналогичную операцию с любой из куч, содержащей более одного камня. Может ли после последовательного применения нескольких таких операций оказаться, что все кучи состоят из трех камней?

5. Пересекающиеся отрезки, параллельные сторонам единичного квадрата, делят его на четыре прямоугольника. Докажите, что произведение площадей двух не смежных прямоугольников не превосходит $\dfrac{1}{16}$.

6. Докажите, что многочлен x^3-19x^2+9x-2 не имеет отрицательных корней.

7. Действительные числа a, b и c таковы, что $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$ и $abc>0$. Докажите, что $a, b, c>0$.

8. Сколько существует различных игральных костей, т. е. кубиков, на гранях которых расставлены цифры от 1 до 6?

9. Сколько делителей имеет число 3600?

10. Докажите, что натуральное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда число его делителей нечетно.