Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1998 год, вариант 1

1. а) Докажите, что если каждая из диагоналей четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника, то этот четырехугольник параллелограмм.

б) Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а плоские углы при вершине прямые.

в) Докажите, что если $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$, то по крайней мере один из квадратных трехчленов $x^2 + p_i x + q_i$, $i = 1, 2$, имеет действительный корень.

2. а) Нарисуйте график функции $f(x) = 2x + |\log_2 x + 2x| - \log_2 x$.

б) Решите уравнение $\sqrt{2 - \cos 2x} = \sin x - \cos x$.

в) Решите неравенство $\sqrt{|1 - 2x|} \geqslant 1 + ax$.

г) Задумав жениться, Иван открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 10 000 рублей. Сколько денег на семейный отдых он сможет тратить через 8 лет, если будет брать только проценты с накопленной за это время суммы? Банк дает 30% годовых, а $\lg 1{,}3 = 0{,}114$.

3. а) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 1$, $BC = 3$. Точки E и F делят сторону BC на три равные части. Докажите, что

$$\angle CAD + \angle EAD + \angle FAD = 90^\circ.$$

б) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = 2 \operatorname{arctg} \frac{x+y}{2}.$$

в) Вычислите сумму

$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \ldots + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} + \ldots$$

4. а) Найдите наибольший объем треугольной пирамиды, четыре ребра которой имеют длину единица, а два оставшихся равны друг другу.

б) Найдите наибольший объем треугольной пирамиды, четыре ребра которой имеют длину единица.

в) Сколько различных (т. е. различимых по внешнему виду) каркасов треугольных пирамид можно составить из зеленых стержней длиной по 33 см каждый и красных стержней длиной по 20 см?