Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1991 год, вариант 2

1. а) Решите уравнение $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\cos x = -1$.

б) Найдите множество всех точек плоскости, являющихся серединами отрезков, концы которых лежат на кривой $y = x^3$.

в) Найдите все такие a, при которых функция $y = \lg(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ нечетная.

г) Найдите все такие b, что при любом a уравнение $ax + b = |x|$ имеет решение.

2. Пусть $f(x) = \sqrt{x+1} - x$.

а) Решите неравенство $f(x) > -1$.

б) Найдите множество значений функции f.

в) Найдите число положительных решений уравнения $|f(x)| = a$.

3. Дан равнобедренный треугольник с углом α при вершине.

а) Докажите, что

$$\frac{r}{R} = \sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\pi - \alpha}{4},$$

где r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.

б) При каком α отношение $\dfrac{r}{R}$ принимает наибольшее значение?

в) Докажите, что в общем случае отношение $\dfrac{r}{R}$ принимает наибольшее значение для равносторонних треугольников.

4. а) Пусть $a \leqslant b$, $x \leqslant y$. Докажите, что $(a+b)(x+y) \leqslant 2(ax+by)$.

б) Докажите неравенство Чебышева: если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n,\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n, \text{ то } \sum_1^n a_i \sum_1^n b_i \leqslant n \sum_1^n a_i b_i.$$

в) Пусть функция f монотонно возрастает на $[0;\,1]$. Докажите, что $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \leqslant 2\int_0^1 xf(x)dx$.