Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1993 год, вариант 2

1. а) Постройте эскиз графика функции $y = |\log_{4/x}(4x^2)|$.

б) Изобразите на плоскости множество точек $A(a, b)$, для которых при всех x верно неравенство

$$\sin(x+a) \geqslant \sin x + b.$$

в) Найдите наибольший радиус круга, лежащего в верхней полуплоскости, касающегося оси абсцисс в начале координат и не имеющего других общих точек с параболой $y = x^2$.

г) Докажите, что $\int\limits_0^n \frac{\sin x}{1+x^2}dx > 0$ при всех натуральных n.

2. а) Решите неравенство $2x \cdot 2^{\sqrt{3-x}} + 3 \cdot 2^{x-1} > x \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{\sqrt{3-x}}$.

б) Решите неравенство $\cos^2 x - \frac{2}{\cos x} \leqslant 2 - \cos x$.

в) Докажите, что не существует прямых, касающихся графика функции $y = x^3 + 19x^2 + 9x + 3$ в двух разных точках.

3. В условии этой задачи все числа — комплексные.

а) Нарисуйте образ полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \frac{1}{2}$ при отображении, сопоставляющем числу z число z^{-1}.

б) Докажите, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, то треугольник с вершинами в точках a, b, c содержит начало координат.

в) Докажите, что всякий корень уравнения

$$\frac{1}{z-c_1} + \frac{1}{z-c_2} + \frac{1}{z-c_3} = 0$$

лежит в треугольнике с вершинами в точках c_1, c_2, c_3.

4. а) Найдите число различных буквенных сочетаний, которые можно образовать, переставляя буквы в слове «аллах».

б) Докажите тождество

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} C_n^{k-1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

в) Имеются две монеты, одна из которых фальшивая: на обеих ее сторонах изображен герб. Случайным образом выбрали одну монету. Какова вероятность того, что монета фальшивая, если она лежит гербом вверх?