## Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1997 год, вариант 2

**1.** а) Решите уравнение $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=2$.

б) Числа $p,\ q\in[-1;1]$ выбираются случайным образом. Найдите вероятность того, что многочлен $px^2+qx-1$ имеет действительные корни.

в) Докажите, что если $a$, $b$, $c$ — длины сторон некоторого треугольника, то из отрезков длиной $\sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{b},\ \sqrt[n]{c}$ также можно составить треугольник.

г) Дан треугольник $ABC$. Докажите, что если $\dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B}=\dfrac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$, то он либо равнобедренный, либо прямоугольный.

**2.** а) Решите неравенство $\log_2^2 x+3\log_2 x\log_2(x-2)+2\log_2^2(x-2)\geqslant 0$.

б) Решите уравнение $4\sin x\cos 2x\cos 4x=\sin 7x$.

в) Найдите все $b$, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y+x^2\leqslant b,\\ x+y^2\leqslant b\end{cases}$$

имеет единственное решение.

**3.** а) Решите уравнение $1+x^2+\ldots+x^{4k-2}=2kx^{2k-1}$.

б) Докажите, что если все ненулевые коэффициенты некоторого многочлена равны $\pm 1$, то все его корни по модулю меньше двух.

в) Известно, что $a<b<c,\ a+b+c=6$ и $ab+bc+ca=9$. Докажите, что $0<a<1<b<3<c<4$.

**4.** а) Найдите все пары $a$, $b$ комплексных чисел, таких что $|a|=|b|=1$ и $|a+b|=|a^2+b^2|$.

б) Докажите, что если $|a|=|b|=|c|=1$, то $|a+b+c|=|ab+bc+ca|$.

в) Докажите, что если

$$\begin{cases} \cos x+\cos y+\cos z=0,\\ \sin x+\sin y+\sin z=0,\end{cases}$$

то $\sin 3x=\sin 3y=\sin 3z$.