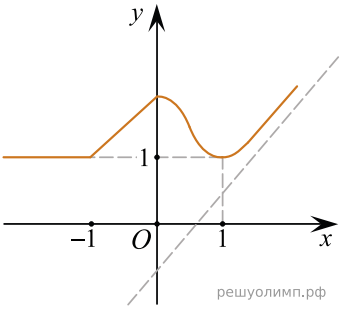
Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1990 год, вариант 2

1. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sin(x+y)\sin(x-y)>0.$$

б) Решите уравнение $\log_2^2(-x)-1-\log_2\left(-\frac{1}{2}x\right)=0.$

в) На рисунке изображен график функции. Нарисуйте график производной этой функции и дайте необходимые пояснения.



г) Две вершины квадрата, расположенного в первом координатном угле, имеют координаты $(a,0)$ и $(0,b)$. Найдите координаты двух других вершин и покажите, что центр квадрата лежит на биссектрисе этого координатного угла.

2. Дана функция $f(x)=\cos 2x+\sin x$.

а) Решите уравнение $f(x)=1$.

б) Найдите число решений уравнения $f(x)=a$, лежащих на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, в зависимости от действительного параметра a.

в) Найдите множество значений функции f.

3. а) Покажите, что $\sqrt{x+y}\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant\sqrt{2(x+y)}$ при $x,\ y\geqslant 0$.

б) Единичный квадрат разделен двумя прямыми на четыре прямоугольника. Докажите, что произведение площадей двух несмежных прямоугольников не превосходит $\frac{1}{16}$.

в) Найдите наибольшее значение произведения xy, если известно, что $x^2+xy+y^2\leqslant 1$.

4. Дана функция $f(x)=x^2$. Пусть $t\in[0;1]$. Обозначим через $S(t)$ сумму площадей двух криволинейных треугольников, ограниченных графиком функции f, вертикальными прямыми $x=0$, $x=1$ и горизонтальной прямой, проходящей через точку графика с абсциссой $x=t$.

а) Получите явную формулу для функции $S(t)$.

б) Найдите точку минимума функции S.

в) Выполните пункт б) в случае, если $f(x)=\ln(x+1)$.