Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1992 год, вариант 2

1. а) Докажите, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных действительных корня, если $a(a-b+c)<0$. Верно ли обратное утверждение?

б) Решите уравнение

$$\sin\frac{1992\pi^2}{x}=\frac{1}{\cos x}.$$

в) Изобразите на плоскости множество всех таких пар (a,b) действительных чисел, что неравенство $|x-a|+|x-b|\leqslant 2$ верно при всех $x\in[0;1]$.

г) Существует ли прямая, пересекающая кривую $x^3+y^3=1$ в трех различных точках?

2. Решите неравенства:

а) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x}+1}\geqslant 2\sqrt{x}$,

б) $\dfrac{\log_2 x+\log_x 8}{\log_x(2x)}\leqslant 3$.

в) Найдите все такие целые k, что уравнение $5-2\cos 2x=k(2\sin x+1)$ не имеет решений.

3. Даны многочлены $p_n(x)=x^n\sin\alpha-x\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha$ и $q(x)=x^2-2x\cos\alpha+1$.

а) Докажите, что многочлен $p_4(x)$ делится на $q(x)$.

б) Найдите все α, отличные от πk, $k\in\mathbb{Z}$, при которых многочлен $q(x)$ имеет действительные корни.

в) Докажите, что при всех натуральных $n\geqslant 2$ многочлен $p_n(x)$ делится на $q(x)$.

4. Функция f задана, непрерывна и $f(x+1)=f(x)$ при всех $x\in\mathbb{R}$.

а) Докажите, что интеграл $\int_t^{t+1} f(x)\,dx$ не зависит от t. Предположим дополнительно, что функция f положительна. Пусть

$$F(\alpha)=\int_0^1\frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\,dx.$$

б) Докажите, что $F\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqslant 1$.

в) Найдите все действительные α, при которых $F(\alpha)\geqslant 1$.