О. А. Иванов 100 олимпиадных задач для старшеклассников. Задание 6

1. Вычислите $1988\frac{19}{6891}\cdot 1987\frac{19}{6891}-1989\frac{19}{6891}\cdot 1986\frac{19}{6891}$.

2. Решите систему $\begin{cases} x^{10}+y^{10}=1, \\ x^6+y^6=1. \end{cases}$

3. Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник и найдите отношение его площади к площади исходного треугольника.

4. В десятичной записи двух натуральных чисел участвуют только цифры 1, 4, 6 и 9. Может ли одно из них быть ровно в 17 раз больше другого?

5. Какое из двух чисел больше, 2^{300} или 3^{200}; $99!$ или 50^{99}?

6. При каких значениях a уравнение $\cos\sqrt{a-x^2}=1$ имеет ровно 8 решений?

7. На доске выписано 450-значное число $123456789123\ldots$ В нем вычеркнули все цифры, стоявшие на нечетных местах. Затем в получившемся числе опять вычеркнули цифры на нечетных местах, и т. д. Какая цифра будет вычеркнута последней?

8. Квадрат 3×3 называется магическим, если в его клетках числа от 1 до 9 расставлены таким образом, что суммы чисел во всех строках, столбцах и диагоналях равны друг другу. Докажите, что в средней клетке любого такого магического квадрата стоит одно и то же число. Сколько всего существует таких квадратов?

9. В вершинах 100-угольника расставлены числа, причем каждое из них равно среднему арифметическому его соседей. Докажите, что все они равны между собой.

10. В клетках бесконечной доски расставлены натуральные числа так, что для любых пяти клеток, расположенных в форме креста, центральное число есть среднее арифметическое четырех других. Докажите, что во всех клетках доски стоит одно и то же число. Верно ли это утверждение, если предполагается, что числа являются целыми?