Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1999 год, вариант 2

1. а) Решите систему $\begin{cases} \sin x \sin y = 0, \\ \cos x \cos y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

б) Существует ли многочлен $p(x) = x^8 + a_1 x^7 + \ldots + a_8$, имеющий восемь различных действительных корней, все коэффициенты a_i которого по модулю не превосходят 0,001?

в) Докажите неравенство $\ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \ln 3 \ln 4 \ln 5 > \ln 3 \ln 4 + \ln 4 \ln 5 + \ln 5 \ln 3 + 1$.

2. а) Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 48x} \geqslant 9$.

б) Найдите все a, при которых уравнение $\cos(x^2) = \cos(x + 2)$ имеет решения на отрезке $[0; a]$.

в) Найдите наименьшее расстояние между диагональю прямоугольного параллелепипеда с ребрами 4, 2, 4 см и не пересекающей ее диагональю его квадратной грани.

г) Найдите наибольшую площадь четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны 2, 3, 4, 3 см.

3. Дана последовательность $x_n = a \cdot 2^{-n} + b \cdot 3^n$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$

а) Докажите, что $2x_{n+1} = 7x_n - 3x_{n-1}$ при всех $n \geqslant 1$.

б) Известно, что $x_{1999} < 0$. Верно ли, что $x_{1998} < 0$?

в) Пусть $a = b = 1$. Существует ли арифметическая прогрессия, среди членов которой содержатся все числа $x_0,\ x_1,\ \ldots$?