О. А. Иванов 100 олимпиадных задач для старшеклассников. Задание 8

1. В соревновании по «крестикам-ноликам» по кубковой системе участвуют 1991 человек. Сколько будет сыграно партий до выявления победителя?

2. Покажите, что если из доски $2^n \times 2^n$ удалить любую клетку, то оставшуюся часть можно замостить уголками.

3. Докажите, что данной число — целое:

$$(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1)(\sqrt[3]{49}-1)(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1).$$

4. Действительные числа x, y и a таковы, что $x+y=a-1,\ x^2+y^2=5a^2-3a+\frac{1}{2}$. При каком a произведение xy — наибольшее?

5. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям трапеции с длинами a и b и проходящего через точку пересечения ее диагоналей.

6. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда его средние линии равны.

7. Решите уравнение $x^3-[x]-8=0$ (здесь $[x]$ — целая часть числа).

8. Петя, Коля и Вася решили 100 задач, причем каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу «трудной», если ее решил только один из мальчиков, и «легкой», если ее решили все трое. Докажите, что «трудных» задач на 20 больше, чем «легких».

9. Решите систему $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 4xy(2x^2-1)=1. \end{cases}$

10. Решите уравнение $e^{3x-3}-3e^{x-1}=\sqrt{3}$.