Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1996 год, вариант 1

1. а) Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение $x^{11} - ax + 1 = 0$?

б) Пусть $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ($a_i \geqslant -1$). Докажите неравенство

$$(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1) \leqslant e^s.$$

в) Пусть A, B, C — величины углов некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что если

$$\operatorname{tg}(A-B) + \operatorname{tg}(B-C) + \operatorname{tg}(C-A) = 0,$$

то этот треугольник — равнобедренный.

г) Пусть $f(x) = \int\limits_0^x \sin^{1995} t\,dt$. Решите уравнение $f(x) = 0$.

2. а) Решите неравенство $\log_2 x + |\log_{2x} 2| \geqslant \dfrac{3}{2}$.

б) Верно ли, что при всех $k \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ 6\}$ справедливо неравенство $\cos^2 k + \cos^2 2k + \cos^2 3k \geqslant 1$?

в) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a,\ b)$, таких что уравнение $\sqrt{x^2-1} = ax + b$ ($b > 0$) имеет решение.

3. Про последовательность $\{x_n\}$ известно, что $x_1 = 1$ и если $x_n = \dfrac{p}{q}$, то $x_{n+1} = \dfrac{p+2q}{p+q}$.

а) Докажите, что каждая из дробей, появляющихся при определении членов этой последовательности, несократима.

б) Докажите, что последовательность $a_n = |x_n^2 - 2|$ монотонна.

в) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Про последовательность $\{q_n\}$ известно, что $q_1 = 1$, $q_i \in \mathbb{N}$ и $q_{n+1} \leqslant q_1 + \ldots + q_n + 1$.

а) Докажите, что любое натуральное число представимо в виде суммы различных (возможно, одного) членов этой последовательности.

б) Докажите, что если последовательность q_n такова, что всякое натуральное числа представляется в виде суммы некоторых членов последовательности $\{q_n\}$ единственным образом, то

$$(1+x^{q_1})(1+x^{q_2})\ldots(1+x^{q_n}) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^N.$$

в) Найдите все последовательности, для которых имеет место тождество из предыдущего пункта.