Последовательности a_n, b_n связаны соотношениями $a_{n+1} = \dfrac{b_n}{2},\ b_{n+1} = \dfrac{1+a_n}{2}$.

а) Пусть $a_1 = 0,\ b_1 = 1$. Положим

$$\Delta_n = \sqrt{\left(a_n - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b_n - \frac{2}{3}\right)^2}.$$

Докажите, что числа Δ_n образуют геометрическую прогрессию.

б) Докажите, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют и не зависят от выбора $a_1,\ b_1$.

в) Лучи ℓ_1 и m_1 лежат в первом координатном угле, причем луч ℓ_1 образует угол $\dfrac{\pi}{5}$ с осью абсцисс, а m_1 — угол $\dfrac{\pi}{7}$ с осью ординат. Луч ℓ_n является биссектрисой угла между осью абсцисс и лучом m_{n-1}, а m_n — биссектрисой угла между осью ординат и ℓ_{n-1}. Вычислите с точностью до 0,01 угол между лучом ℓ_{40} и осью абсцисс.