

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. Числа  $a < b$  таковы, что их НОД имеет 39 делителей (включая 1 и себя), а их НОК — 77 делителей. Докажите, что  $b = a^2$ .

2. На доске написано несколько линейных функций. Андрей заметил, что если взять две любые написанные функции, перемножить их и взять производную результата, то полученная функция тоже окажется написанной на доске. Докажите, что графики всех этих функций проходят через одну точку.

3. У Ани и Бори есть проволочная окружность, и они её решили поделить. Аня поставила на этой окружности метку в случайно выбранной точке, которую Боря не видит. Боря случайным образом выбирает две точки на окружности (выбор второй точки не зависит от выбора первой) и разрезает окружность в этих двух точках. Аня берёт себе ту часть окружности, в которой находится выбранная ей точка. Найдите вероятность того, что Анин кусок окажется длиннее Бориного.

4. Дан треугольник  $ABC$ . Точка  $I$  — центр вписанной окружности,  $E, F, G$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно. На отрезке  $AF$  отмечена точка  $K$ , такая что  $KF = FC$ , а на продолжении  $AC$  за точку  $C$  отмечена точка  $L$ , такая что  $AK = CL$ . Прямая  $KI$  пересекается с отрезком  $EG$  в точке  $M$ . Отрезки  $IL$  и  $BC$  пересекаются в точке  $N$ . Докажите, что угол  $KMN$  прямой.

5. В социальной сети «ВТомате» зарегистрирован ровно миллион пользователей, некоторые из которых являются друзьями. Оказалось, что если пользователи  $A$  и  $B$  друзья, и у них  $d_1$  и  $d_2$  друзей соответственно, то  $d_1 \cdot d_2 \leq 10000$ . Владелец сети Паша Помидуров посмотрел, сколько друзей у каждого пользователя, и сложил все эти числа. Могло ли у него получиться число, большее ста миллионов?