

## Олимпиада СПбГУ, 6–9 класс, 2 тур (заключительный), 3, 2016

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. Существует ли такой квадратный трехчлен  $f(x)$  с целыми коэффициентами, что  $f(f(\sqrt{3})) = 0$ ?

2. Из чисел  $1, 2, 3, \dots, 2016$  выбраны  $k$  чисел. При каком наименьшем  $k$  среди выбранных чисел обязательно найдутся два числа, разность которых больше 672 и меньше 1344?

3. Неотрицательные числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют условию  $x + y \leq 1$ . Докажите, что  $12xy \leq 4x(1 - y) + 9y(1 - x)$ .

4. Дана доска  $2016 \times 2016$ . При каком наименьшем  $k$  клетки доски можно так раскрасить в  $k$  цветов, что

- 1) одна из диагоналей покрашена в первый цвет;
- 2) клетки, симметричные относительно этой диагонали, покрашены в одинаковый цвет;
- 3) любые две клетки расположенные в одной строке по разные стороны от клетки первого цвета покрашены в разные цвета (клетки не обязательно соседние с клеткой первого цвета).

5. Дан параллелограмм  $ABCD$ . Окружность касается стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ , а также продолжения сторон  $BA$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $S$  соответственно. Отрезок  $PS$  пересекает стороны  $DA$  и  $DC$  в точках  $Q$  и  $R$ . Докажите, что вписанная окружность треугольника  $CDA$  касается сторон  $AD$  и  $DC$  в точках  $Q$  и  $R$ .

6. При каких натуральных  $n$  число

$$\frac{1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (2n)!}{(n+1)!}$$

является точным квадратом? Как обычно,  $n!$  обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих  $n$ . Например,  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ .