

Олимпиада СПбГУ, 6–9 класс, 2 тур (заключительный), 3, 2016

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{3})) = 0$?
2. Из чисел $1, 2, 3, \dots, 2016$ выбраны k чисел. При каком наименьшем k среди выбранных чисел обязательно найдутся два числа, разность которых больше 672 и меньше 1344?
3. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x + y \leq 1$. Докажите, что $12xy \leq 4x(1 - y) + 9y(1 - x)$.
4. Дана доска 2016×2016 . При каком наименьшем k клетки доски можно так раскрасить в k цветов, что
 - 1) одна из диагоналей покрашена в первый цвет;
 - 2) клетки, симметричные относительно этой диагонали, покрашены в одинаковый цвет;
 - 3) любые две клетки расположенные в одной строке по разные стороны от клетки первого цвета покрашены в разные цвета (клетки не обязательно соседние с клеткой первого цвета).
5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность касается стороны AC треугольника ABC , а также продолжения сторон BA и BC в точках P и S соответственно. Отрезок PS пересекает стороны DA и DC в точках Q и R . Докажите, что вписанная окружность треугольника CDA касается сторон AD и DC в точках Q и R .

6. При каких натуральных n число

$$\frac{1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (2n)!}{(n+1)!}$$

является точным квадратом? Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n . Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.