

**Олимпиада Будущие исследователи — будущее науки, 10 класс, 2 тур (заключительный), 2018**

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. Даны три положительных числа, не обязательно различных. Известно, что если из произведения любых двух из них вычесть треть, то получится одно и то же число  $a$ . Докажите, что  $a \geq -\frac{1}{4}$ .
2. Решите уравнение  $4x = 2 + \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1}$ .
3. Дана прямая на плоскости и на ней отмечено несколько (больше двух) точек. Докажите, что можно отметить еще одну точку на плоскости (вне данной прямой) так, чтобы среди всех треугольников с отмеченными вершинами было больше половины остроугольных.
4. Петя говорит Васе: «Я построил неравносторонний треугольник  $ABC$  и провел биссектрисы  $AM$  и  $CN$ . Оказалось, что  $OM = ON$ , где  $O$  — точка пересечения биссектрис. Сможешь ли ты определить, чему равен угол  $B$ ?» Вася отвечает: «Да такого не может быть, чтобы в неравностороннем треугольнике отрезки  $OM$  и  $ON$  оказались равными». Кто из мальчиков прав?
5. Найдите все пары натуральных чисел  $m, n$ , для которых  $n! + 4! = m^2$  (где  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ).