Всесибирская олимпиада школьников, 10 класс, 3 тур (заключительный), 2019

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. Прямые l и m пересекают ось OX в различных точках, симметричных друг другу относительно начала координат, и параболу $y=x^2$ в точках (a, a^2), (b, b^2) и (c, c^2), (d, d^2) соответственно. Доказать, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0.$$

2. Множество A содержит 15 различных натуральных чисел, не превосходящих 100, одно из которых равно 84, и обладает следующим свойством: модуль разности любых двух различных чисел из A снова содержится в A. Доказать, что A обязательно содержит число 42.

3. Пусть в каждой клетке квадратной таблицы n на n, где n - нечётно, стоит 1 или -1. Обозначим произведения всех чисел в первой. второй, ..., n-ой строках таблицы через a_1, a_2, ..., a_n, а в первом, втором, ..., n-ом столбцах — через b_1, b_2, ..., b_n. Доказать, что

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+b_1+b_2+\ldots+b_n \neq 0.$$

4. Докажите, что для любых положительных чисел a и b и любого натурального n выполняется неравенство

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность и длины сторон BC и DC равны, а длина стороны AB равна длине диагонали AC. Пусть точка P середина дуги CD, не содержащей точку A, и Q — точка пересечения диагоналей AC и BD. Доказать, что прямые PQ и AB перпендикулярны.